פתרון מלא עם הסברים: פרויקט "חממה בערבה"

לכל סעיף: הרעיון, החישוב והסבר לתוצאה. בסוגריים: חלוקת הנקודות. • $T[K] = t[°C] + 273$,$P_{atm} = 100\ kPa$

נסו לפתור לבד לפני שאתם קוראים את הפתרון. בכל סעיף, קראו קודם את "הרעיון" ונסו להמשיך משם.

סעיף א: כמה חום בורח בלילה? (22 נק')

הרעיון. החום עובר מהאוויר החם שבפנים אל האוויר הקר שבחוץ דרך חמש "מכשולים" אחד אחרי השני. כמו נגדים חשמליים בטור, ההתנגדויות התרמיות מתחברות, ואותו הספק חום עובר דרך כל אחת מהן. ההפרש בין הטמפרטורות הוא ה"מתח", והספק החום הוא ה"זרם".

1. חמש התנגדויות בטור, מבפנים החוצה: הסעה בפנים ← הולכה בפוליקרבונט ← הולכה בשכבת האוויר ← הולכה בפוליקרבונט ← הסעה בחוץ. (4 נק': סדר נכון וזיהוי המנגנונים)

2. לכל הגג, $A = 180\ m^2$: (6 נק')

$$R_{in} = 1/(h_{in}\cdot A) = 1/(6\cdot 180) = 9.26\cdot 10^{-4}\ K/W$$

$$R_{pc} = \Delta x/(k\cdot A) = 0.004/(0.20\cdot 180) = 1.11\cdot 10^{-4}\ K/W \quad (\times 2)$$

$$R_{air} = 0.010/(0.026\cdot 180) = 2.137\cdot 10^{-3}\ K/W$$

$$R_{out} = 1/(20\cdot 180) = 2.78\cdot 10^{-4}\ K/W$$

$$R_{th,total} = 9.26 + 1.11 + 21.37 + 1.11 + 2.78 = 35.63\cdot 10^{-4} = 3.563\cdot 10^{-3}\ K/W$$

ההתנגדות הגדולה ביותר היא של שכבת האוויר, כ־60% מהכול: לאוויר עומד מוליכות נמוכה מאוד, ולכן הוא מבודד מצוין. זו כל הסיבה ללוח "כפול". (בונוס למי שמציין שזה נכון רק כשהאוויר לא זורם, אחרת יש הסעה בתוך השכבה.)

3. (4 נק')

$$Q = \Delta T\ /\ R_{th,total} = (16 - 2)\ /\ 3.563\cdot 10^{-3} = 3{,}930\ W \approx 3.93\ kW$$

4. אותו הספק עובר דרך כל התנגדות, ולכן: (4 נק')

$$T_{s,in} = T_{\infty,in} - Q\cdot R_{in} = 16 - 3930 \cdot 9.26\cdot 10^{-4} = 16 - 3.64 = 12.4°C$$

12.4°C > 10°C: המשטח חם מנקודת הטל, ולא יתעבו עליו טיפות.

5. (4 נק')

$$E = Q\cdot t = 3.93\ kW \cdot 12\ h = 47.2\ kWh \quad (= 1.70\cdot 10^{8}\ J)$$

$$cost = 47.2 \cdot 0.60 = 28.3\ ₪\ per\ night$$

סעיף ב: לוח יחיד או כפול? (10 נק')

הרעיון. מורידים מהמעגל את ההתנגדות הגדולה ביותר, שכבת האוויר, וחוזרים על אותו חישוב. ההתנגדות הכוללת קטנה, הספק החום גדל, והמשטח הפנימי מתקרר.

1. בלי שכבת האוויר ועם לוח אחד: (5 נק׳)

$$R_{th,total} = 9.26\cdot10^{-4} + 1.11\cdot10^{-4} + 2.78\cdot10^{-4} = 1.315\cdot10^{-3}\ \text{K/W}$$

$$Q = 14\ /\ 1.315\cdot10^{-3} = 10{,}650\ \text{W} \approx 10.6\ \text{kW} \rightarrow 10.65\ /\ 3.93 = \times 2.7$$

ללילה: 127.8 kWh, כ־76.7 ₪, כלומר כ־48 ₪ יותר בכל לילה.

2. (5 נק׳)

$$T_{s,in} = 16 - 10{,}650 \cdot 9.26\cdot10^{-4} = 16 - 9.86 = 6.1\,^{\circ}\text{C}$$

6.1°C < 10°C: המשטח הפנימי קר מנקודת הטל. אדי המים באוויר הלח של החממה מתעבים עליו, הטיפות מצטברות ומטפטפות על השתילים. בלוח הכפול שכבת האוויר "מחזיקה" את רוב הפרש הטמפרטורות, והמשטח הפנימי נשאר חם.

סעיף ג: קרינה (10 נק׳)

> **הרעיון.** כל גוף פולט קרינה, ואורך הגל שלה תלוי בטמפרטורה שלו: השמש החמה מאוד פולטת בעיקר אור, וגופים בטמפרטורת החדר פולטים אינפרא־אדום. משטח יכול לבלוע קרינה, להחזיר אותה או להעביר אותה, ומשטח שבולע טוב גם פולט טוב.

1. קרינת השמש היא בעיקר באורכי גל קצרים (אור נראה וקרוב לו), והפוליקרבונט שקוף להם. הצמחים והקרקע בולעים את הקרינה, מתחממים, ופולטים קרינה באורכי גל ארוכים (אינפרא־אדום), שהפוליקרבונט כמעט לא מעביר. האנרגיה נכנסת בקלות ויוצאת בקושי, ולכן החממה מתחממת. (4 נק׳)

2. הצד המבריק כלפי **פנים החממה**, למטה אל הצמחים. משטח מתכתי מבריק מחזיר את רוב הקרינה התרמית ובולע ופולט מעט מאוד (פליטות נמוכה). כך הקרינה שהצמחים והקרקע פולטים בלילה חוזרת אליהם במקום לברוח דרך הגג אל השמים הקרים. (4 נק׳; תשובה "כלפי חוץ, כדי לפלוט מעט" מקבלת 2 נק׳ אם הנימוק נכון)

3. משטח לבן מחזיר את רוב אור השמש ובולע מעט, ולכן המיכל היה מתחמם הרבה פחות. האוויר בו אולי לא היה מגיע ל־73°C, והחלון לא היה נפתח, או נפתח מאוחר מאוד. משטח שחור מט בולע כמעט את כל הקרינה. (2 נק׳)

סעיף ד: מתי החלון מתחיל להיפתח? (14 נק׳)

> **הרעיון.** כל עוד הבוכנה על העוצרים, הנפח לא משתנה. הבוכנה תזוז רק כשהלחץ מלמטה יתגבר על האטמוספרה ועל משקל החלון מלמעלה. לכן מחשבים קודם את הלחץ הזה ממאזן כוחות, ואז את הטמפרטורה שבה האוויר מגיע אליו.

1. המנומטר מראה לחץ יחסי, ולכן: (4 נק׳)

$$P_1 = P_{gauge} + P_{atm} = 0 + 100 = 100\ \text{kPa},\quad T_1 = 27 + 273 = 300\ \text{K}$$

$$m = P_1 V_1/(R\cdot T_1) = 100{,}000 \cdot 0.040\ /\ (287 \cdot 300) = 0.0465\ \text{kg} \approx 46.5\ \text{g}$$

2. כשהבוכנה עומדת לזוז, הכוח של האוויר מלמטה מאזן את האטמוספרה ואת החלון מלמעלה: (4 נק׳)

$$A = \pi\cdot D^2/4 = \pi\cdot 0.10^2/4 = 7.854\cdot10^{-3}\ \text{m}^2$$

$$P_2\cdot A = P_{atm}\cdot A + F \rightarrow P_2 = 100{,}000 + 120\ /\ 7.854\cdot10^{-3} = 100{,}000 + 15{,}279 = 115.3\ \text{kPa}$$

$$\text{manometer: } P_2 - P_{atm} = 15.3\ \text{kPa} = 0.153\ \text{bar}$$

3. איזוכורי: הבוכנה על העוצרים, הנפח לא משתנה (הלחץ עוד לא מספיק כדי להזיז אותה). (3 נק')

$$T_2 = T_1 \cdot P_2/P_1 = 300 \cdot 115.28/100 = 345.8\ \text{K} = 72.8°\text{C}$$

4. (3 נק')

$$W_{12} = 0 \quad \text{(constant volume)}$$
$$Q_{12} = \Delta U_{12} = m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) = 0.04646 \cdot 717.5 \cdot 45.8 = 1{,}528\ \text{J} \approx 1.53\ \text{kJ}$$

סעיף ה: החלון נפתח (16 נק')

הרעיון. ברגע שהבוכנה זזה, היא כל הזמן בשיווי משקל, והכוחות עליה לא משתנים. לכן הלחץ נשאר קבוע, והאוויר מתפשט ומבצע עבודה. החום שנכנס מתחלק לשניים: חלק מחמם את האוויר (ΔU), וחלק יוצא כעבודה.

1. איזוברי: בכל רגע בזמן התנועה האיטית הבוכנה בשיווי משקל, $P \cdot A = P_{atm} \cdot A + F$, ו־$F$ ו־P_{atm} קבועים. לכן הלחץ נשאר 115.3 kPa לכל אורך המהלך. (4 נק')

2. (4 נק')

$$\Delta V = A \cdot L = 7.854 \cdot 10^{-3} \cdot 0.25 = 1.963 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 = 1.96\ \text{L} \rightarrow V_3 = 41.96\ \text{L}$$
$$T_3 = T_2 \cdot V_3/V_2 = 345.8 \cdot 41.96/40 = 362.8\ \text{K} = 89.8°\text{C}$$

89.8°C < 95°C: האטם עומד בטמפרטורה, אבל המרווח קטן (ראו סעיף ז).

3. (5 נק')

$$W_{23} = P_2 \cdot (V_3 - V_2) = 115{,}279 \cdot 1.963 \cdot 10^{-3} = 226.3\ \text{J}$$
$$\Delta U_{23} = m \cdot c_v \cdot (T_3 - T_2) = 0.04646 \cdot 717.5 \cdot 16.98 = 565.9\ \text{J}$$
$$Q_{23} = m \cdot c_p \cdot (T_3 - T_2) = 0.04646 \cdot 1004.5 \cdot 16.98 = 792.2\ \text{J}$$
$$\text{check: } Q - W = 792.2 - 226.3 = 565.9\ \text{J} = \Delta U\ \checkmark$$

4. (3 נק')

$$F \cdot L = 120 \cdot 0.25 = 30\ \text{J} \quad \text{of} \quad 226.3\ \text{J}$$
$$P_{atm} \cdot \Delta V = 100{,}000 \cdot 1.963 \cdot 10^{-3} = 196.3\ \text{J}$$

רק כ־13% מהעבודה הרימו את החלון. השאר, 196 J, הלכו על דחיפת האוויר האטמוספרי שמעל הבוכנה: הגז צריך "לפנות מקום" באטמוספרה.

סעיף ו: הערב, והמחזור נסגר (16 נק')

הרעיון. האוויר חוזר בדיוק למצב 1, ולכן זה מחזור: סכום שינויי האנרגיה הפנימית הוא אפס, וסכום החום שווה לסכום העבודה. בדיאגרמת P-V השטח שבתוך המחזור הוא העבודה נטו.

1. **3→4 איזוכורי**: הנעילה מחזיקה את הבוכנה, הנפח קבוע $V_4 = V_3$. **4→1 איזותרמי**: הסגירה איטית מאוד, יש זמן למעבר חום עם הסביבה, והטמפרטורה נשארת 300 K. (4 נק')

$P_4 = m \cdot R \cdot T_4 / V_4 = P_1 \cdot V_1 / V_3 = 100 \cdot 40 / 41.96 = 95.3\ \text{kPa}$ (manometer -0.047 bar, below atmospheric)

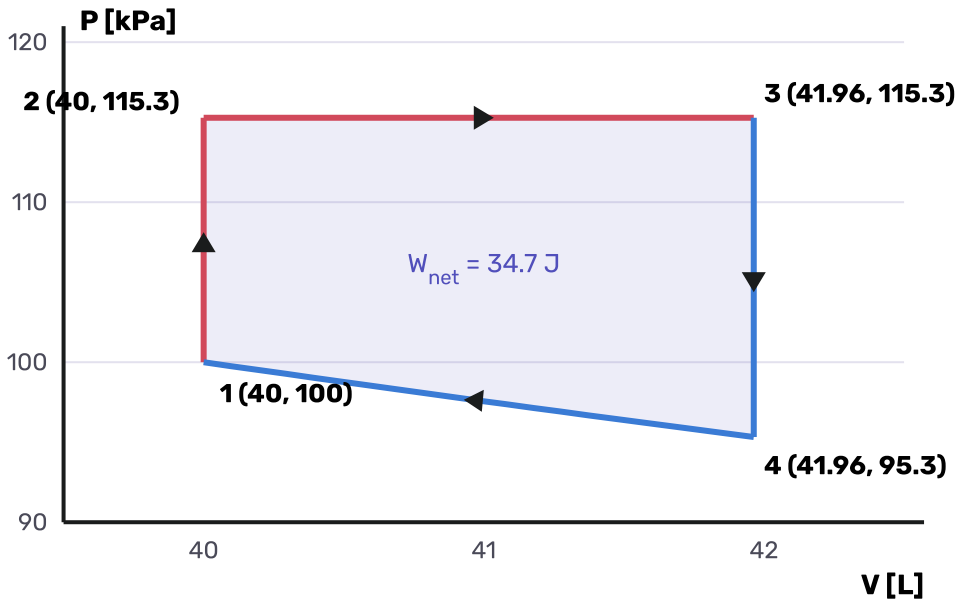
2. (5 נק')

$3 \to 4$: $W = 0,\ Q = \Delta U = m \cdot c_v \cdot (T_4 - T_3) = 0.04646 \cdot 717.5 \cdot (300 - 362.8) = -2{,}094\ \text{J}$

$4 \to 1$: $\Delta U = 0,\ Q = W = m \cdot R \cdot T \cdot \ln(V_1/V_4) = P_1 V_1 \cdot \ln(40/41.96) = 4000 \cdot (-0.0479) = -191.7\ \text{J}$

תהליך	סוג	Q [ג']	W [ג']	ΔU [ג']
1→2	איזוכורי	+1,527.9	0	+1,527.9
2→3	איזוברי	+792.2	+226.3	+565.9
3→4	איזוכורי	−2,093.8	0	−2,093.8
4→1	איזותרמי	−191.7	−191.7	0
סה"כ		**34.7+**	**34.7+**	**0**

3. (4 נק': ארבע נקודות עם ערכים, קווים אנכיים ואופקי, עקומה איזותרמית, כיוון עם השעון)



אדום: חום נכנס. כחול: חום יוצא. המחזור מסתובב עם כיוון השעון, ולכן העבודה נטו חיובית.

4. (3 נק')

$\Sigma Q = 1527.9 + 792.2 - 2093.8 - 191.7 = 34.7\ \text{J} = \Sigma W = 226.3 - 191.7$ ✓ $\quad \Sigma \Delta U = 0$ ✓

$Q_{in} = 1527.9 + 792.2 = 2{,}320\ \text{J} \ \rightarrow\ W_{net}/Q_{in} = 34.7/2320 = 1.5\%$

כ"מנוע" זה גרוע מאוד: כמעט כל החום שנכנס יוצא שוב לסביבה. אבל לחקלאי זה לא משנה. החום מהשמש בחינם, והמטרה היא לפתוח חלון בלי חשמל, לא לייצר עבודה.

סעיף ז: סופת רוח (7 נק')

הרעיון. אותה דחיסה, שתי מהירויות. כשהדחיסה מהירה אין זמן למעבר חום, וכל העבודה שנעשית על הגז הופכת לאנרגיה פנימית, כלומר לטמפרטורה גבוהה יותר. כשהדחיסה איטית החום מספיק לצאת, והטמפרטורה לא משתנה.

1. אדיאבטי. הדחיסה נמשכת שבריר שנייה, ומעבר חום דרך דפנות המיכל הוא תהליך איטי, כך שהחום שעובר זניח: $Q \approx 0$. (2 נק')

2. מאותו מצב 3 (115.3 kPa, 362.8 K, 41.96 L) עד 40 L: (5 נק')

adiabatic: $P = 115.3 \cdot (41.96/40)^{1.4} = 123.3\ \text{kPa}$, $T = 362.8 \cdot (41.96/40)^{0.4} = 369.8\ \text{K} = 96.8°\text{C}$

isothermal: $P = 115.3 \cdot 41.96/40 = 120.9\ \text{kPa}$, $T = 89.8°\text{C}$ (unchanged)

96.8°C > 95°C: בדחיסה המהירה העבודה שנעשית על הגז הופכת כולה לאנרגיה פנימית, והטמפרטורה עוברת את מגבלת האטם, אפילו לרגע. בדחיסה איטית החום יוצא לסביבה והטמפרטורה לא עולה. פתרונות אפשריים: בולם (משכך) שמאט את הסגירה, או אטם עמיד יותר.

סעיף ח: שיפור התכנון (5 נק')

הרעיון. לא צריך לחשב הכל מחדש. בסעיף ד ראינו שבתהליך בנפח קבוע הטמפרטורה עולה באותו יחס כמו הלחץ. לכן כדי לפתוח בטמפרטורה נמוכה יותר צריך יחס לחצים קטן יותר: להקטין את לחץ הפתיחה, או להגדיל את הלחץ ההתחלתי.

התובנה: בתהליך האיזוכורי $T_2/T_1 = P_2/P_1$. טמפרטורת הפתיחה תלויה רק ביחס בין לחץ הפתיחה ללחץ ההתחלתי.

דרך 1, משקולת נגד: $T_2 = 50 + 273 = 323\ \text{K}$, $P_1 = 100\ \text{kPa}$.

$P_2 = 100 \cdot 323/300 = 107.7\ \text{kPa} \rightarrow F = (107{,}667 - 100{,}000) \cdot 7.854 \cdot 10^{-3} = 60.2\ \text{N}$

counterweight must take off $120 - 60.2 \approx 60\ \text{N}$ of the window's load

דרך 2, מילוי בבוקר: הכוח נשאר 120 N, ולכן $P_2 = 115.3\ \text{kPa}$.

$P_1 = P_2 \cdot T_1/T_2 = 115.28 \cdot 300/323 = 107.1\ \text{kPa (abs)} \rightarrow$ manometer $0.07\ \text{bar}$ at 27°C

הבוכנה עדיין על העוצרים בבוקר, כי $107.1 < 115.3\ \text{kPa}$. (2.5 נק' לכל דרך. גם הגדלת קוטר הבוכנה היא פתרון נכון, אם מחשבים אותה.)